吉川の一般設計学序説を読む

菊池　誠
神戸大学大学院 自然科学研究科
mkikuchi@kobe-u.ac.jp

1　はじめに

吉川の「一般設計学序説」[1] には「一般設計学のための公理的方法」という副題が付く．

理論とは，ある特定の対象に関する概念の分析のための枠組みである．例えば自然数論においては，自然数という対象について，自然数上の和や積という関数という概念の性質を分析する．古典力学においては質点という対象について，質点に関する力と運動という概念の関係を分析する．理論の公理化とはそうしうた理論の対象と概念を特定し，それらの基本的な性質の列挙による理論の形式化である．すなわち，公理化は次の三つのステップからなる．

(1) 理論が扱う対象の特定
(2) その対象についての基本的概念の特定
(3) 概念の満たす基本的性質の列挙

この特定された基本的概念についての基本的性質が公理であり，形式化された理論を構成する公理の集合を公理系という．

一般の理論においては，実験や観察，我々の直感を振り返りながら得られた結論の正しさの検証が可能であり，またそれが必要だとするならば，公理系とは純粋に言葉のみからなる世界であって，その整合性や妥当性は公理系のみの分析によってなされる．公理系を一つの文字列としてテクストと見るとき，そのテクストを解釈し意味を与えるのは読者であり，そのテクストが書かれたときに置かれていた文脈とは無関係に公理系は議論や評価，批判の対象となる．公理化がなされたときの時代背景や，公理化をなした人の息遣いとは無関係に，それ自身が価値を持つことに公理系の特徴がある．公理系において大切なのは「何が書かれようとされていたのか」ではなく，「何を読むことができるのか」である．そのことを通して，逆に公理系の背後にある理論や直感に対する分析が可能になる．

集合論は公理化のための基本的な技術である．公理化そのものは必ずしも集合論を必要としないが，集合論は公理化に共通の明解な枠組みを与える．数学的対象や概念がほぼ例外なく集合によって自然に表現されることが公理化における集合論の有効性の根拠の一つになる．現代的な数学において公理化とは集合論を用いた理論の形式化であり，公理的方法とはそうした公理化による理論の数学的展開のための方法である．「一般設計学序説」にある「公理的方法」という副題は，一般設計学の数学的展開の可能性を示唆する．

本稿ではそうしうた視点から [1] をテクストとして読む．(以下，引用部分はすべて [1] から．)

2　実体，属性，機能 （２節・前）

まず語彙を定める．

一般設計学での最も基本的な単語が**実体，属性，機能**である．一般設計学が扱う対象が実体であり，実体はその性質として属性を持つ．[1] では実体と属性は次のように定義される．

> **定義** 1**．実体集合**とはすべての実体を元とするような集合である．すべての実体とは，存在するもの，存在したもの，存在するであろうものを含む．これを集合 S' とする．
>
> **定義** 2**．属性の項目とその値．**属性を実体がもっているさまざまな物理的性質，科学的性質とする．各性質を属性の項目といい，一つの実体には各項目ごとに一つの値が与えられていて，それは一つに限る．ここで属性表現の方法を定めておく．属性の項目を a_i，それに値 v_{ij} を与え

ることを $a_i = v_{ij}$ と書く．すると，

$$\{a_1 = v_{11}, a_2 = v_{21}, \ldots, a_n = v_{n1}, \ldots\} = s'_1 \in S' \tag{1}$$

という形式で実体集合 S' の元 s'_1 が記述される．

S' が一般設計学が対象とする最も基本的な集合である．S' は「存在するもの，存在したもの，存在するであろうものを含む」とその精神が説明されているが，この定義には具体的に S' に要求される条件は無い．すなわち，任意の集合が実体集合となりえる．また，この属性の定義は，それぞれの属性の項目は実体に対し値を返す関数を定めることを意味する．従って，実体と属性の定義は次のように言い直すことが可能である．

定義 2.1. S' を集合，$\{A_i\}_{i\in I}$ を集合の族，$\{f_i\}_{i\in I}$ を S' から A_i への関数 f_i の集合とする．S' を**実体集合**，S' の元を**実体**，I の元を**属性の項目** といい，$f_i(a)$ を実体 a の属性の項目 i についての**値**と呼ぶ．

定義 2 での属性の項目 a_i と $i \in I$ が対応し，$f_1(s'_1) = v_{11}, f_2(s'_1) = v_{21}, \ldots$ となる．式 1 にあらわれる最後の等号記号は，表現のための便宜的な記号とも述語としての等号とも読める．便宜的な記号と見る場合には，定義 2.1 の記号を用いて式 1 を表すと

$$\{f_i(s'_1)\}_{i\in I} = s'_1 \in S' \tag{2}$$

となる．一方，述語としての等号と読むときには

$$S' \subseteq \prod_{i\in I} A_i \tag{3}$$

となる．(集合を順序対で読みなおしている．) なお，[3] では対応する定義は

> **定義** 2 **(属性項目とその値)** [3]**.** すべての実体は可算個の属性項目にそれぞれ値を与えることにより完全に記述される．

となる．(ここでは属性項目の集合 I が可算集合に制限されている．同じ制限が [1] にもあることは属性表現の添字から読めるが，少なくとも [1, 3] にはこの制限に必然性は無い．) [3] の定義 2 での「完全に記述」という表現は，実体の属性表現による記述にあらわれる等号を述語としての等号と解釈することの根拠になりえる．属性の値によって区別できない二つの実体は区別できないという立場である．この立場では，実体と属性の定義にさらに条件が必要になる．

定義 2.2. 定義 2.1 において，

$$F(a) = (f_i(a))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \tag{4}$$

によって定義される関数 $F : S' \to \prod_{i\in I} A_i$ が単射になるとき，S' を**強い意味での実体集合**と呼ぶ．

[3] の定義 3 では「実体を定める属性項目」という表現が使われており，[3] の中では実体集合とは強い意味での実体集合であると解釈することもできる．関数 F が単射でなければ属性項目とその値によって実体を定めることはできない．

なお，関数 F が単射であると仮定するとき，実体集合が「存在するもの，存在したもの，存在するであろうものを含む」ものならば，

$$S' = \prod_{i\in I} A_i \tag{5}$$

とする立場も可能であろう．このとき実体集合と属性のどちらか一方の単語を公理系の定義から除くことの可能性が生じる．

さて，機能は実体と属性と状況から決定される．

> **定義** 3**.** ある実体を，ある状況に置いたときに発現する属性によって観察される挙動を，その状況における**顕在機能**という．状況が変わることによって異なる機能が現れるが，その現れる可能性のある全挙動を，その実体の**潜在機能**という．顕在機能と潜在機能を総称して**機能**と呼ぶ．また顕在機能を生じさせる状況を**場**という．

この定義は難しい．「状況」とは何か？「属性が発現する」とは何か？「観察された挙動」とは何か？[3] における機能の定義は，より明解である．

> **定義** 3 **(機能)** [3]**.** 実体を定める属性項目から適等に何個か (可算個) 選んで発現させたとき，その全体は一つの機能を作る．従って属性項目が n 個あれば，機能は 2 の n 乗個あり得ることになる．この場合，発現とは，その実体への外部からの働きかけの反作用であると言ってもよい．

すなわち，次のような定義が考えられる．

定義 2.3. $I' \subseteq I$ とする．$a \in S'$ に対して $\{f_i(a) : i \in I'\}$ を I' による a の**機能**という．

直感的には，I' を I から選択するときの状況が**場**であり，I' による a の機能をこの場での**顕在機能**，それ以外の機能を**潜在機能**ということになる．

3　概念 (2節・中)

一般設計学での実体，属性そして機能をめぐる言説の中で，最も重要な役割を持つ単語が**概念**である．一般設計学では概念を**実体概念**と**抽象概念**の二つに分類する．

定義 4．**実体概念**とは，人間が実体を体験することによって成立させた概念である．これはその実体や属性や機能などのように，抽象化の結果得られる抽象概念とはまったく独立である．しかし，抽象概念はこの実体概念から発生する．

定義 5．**抽象概念**とは，人間が意味ないし価値に導かれて実体概念を分類したときに，その各類に関する概念を言う．

実体概念が抽象化の結果得られる概念でないならば，実体概念を公理系の中に取り込むのは難しい．実体概念は実体のなす現実世界と一般設計学が扱う形式的世界との架け橋のような役割を果たすであろう．

いずれにせよ，一般設計学では後に**対応公理**によって「実体集合と（理想的な）実体概念集合は１対１に対応する」ことが要請されている．このとき実体集合 S' と実体概念集合 S の同一視が可能であり，実体概念集合には言及しない公理系の展開も可能であろう．ここではとりあえず，この同一視を採用して実体概念集合の分析は保留する．

一方，抽象概念は一般設計学の公理系において極めて重要であり，その分析は避けては通れない．しかし，定義 5 の表現は数学的ではなく，その分析は難しい．「意味」とは何か？「価値」とは何か？「分類」とは何か？

2.1 節の**薫製肉の設計**では，次のような例が示されている．

> $\cdots$ いま実体（自然物）の集合 S（厳密には実体に関する知識の集合）を考え，$\cdots$．$S = \{s_1, s_2, s_3\}$ である．$\cdots$ 例えば，分類 T_1，T_2 を導入，$T_1 = \{s_1, s_2\}$，$T_2 = \{s_2, s_3\}$ である．これは s_1, s_2 のように実体そのものに対応するのではなく，**その部分集合に対応し**，$\cdots$

すなわち，分類を実体集合の部分集合と考えることができ，従って一つの抽象概念を実体集合の一つの部分集合と考えることが可能である．このことは [1] の図２からも読み取れる．しかし，実体集合の任意の部分集合が抽象概念となる訳ではない．

定義 3.1. $\boldsymbol{T}$ を $\mathcal{P}(S) = \{T; T \subseteq S\}$ の部分集合とする．$\boldsymbol{T}$ の元を**抽象概念**という．

$\boldsymbol{T}$ が満たすべき条件は後に公理 3 で与えられる．

抽象概念には**属性概念，形態概念，機能概念**がある．

定義 6．**属性概念**とは抽象概念の一つであるが，2.2.1 項で述べた実在するものの属性は，人間が認識可能であり，従って属性を知ることによって実体を想定することができる．これは特に価値という側面は陽に意識はされない．むしろ意図としては没価値的にあるいはできるだけ客観的に実体を分類しようとするときに採用される類で，自然科学の態度に近いものである．

定義 7．**形態概念**とは，属性概念の一つであるが，属性のうち特に形態に注目すると形態概念が成立する．

定義 8．**機能概念**とは，抽象概念の一つであるが，特に実体の持つ機能的価値に注目するときに成立するものである．

抽象概念集合を $\boldsymbol{T}$，属性概念集合を $\boldsymbol{T}_0$，機能概念集合を $\boldsymbol{T}_1$，形態概念集合を $\boldsymbol{T}_2$ とすると定義から明らかに，

$$\boldsymbol{T}_2 \subseteq \boldsymbol{T}_0 \subseteq \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}_1 \subseteq \boldsymbol{T} \tag{6}$$

となる（後の定理 4）．なお，これらの記号の導入の段落にある「概念も集合とみなすことができるから」という表現は曖昧である．文脈からは「概念の集合を考えることができるから」と読まねばならないが，文脈なしでは「一つの概念を一つの集合とみなすことができるから」という意味になる．

ところで，[1] では属性と属性概念，機能と機能概念の関係は論じられていないが，定義 2 および定義 3 から次のような解釈が可能であろう．

定義 3.2. S'，I，$\{A_i\}_{i\in I}$，$\{f_i\}_{i\in I}$ を定義2.1 の通りとする．$i \in I$，$a \in A_i$ に対して $T_{(i,a)} = \{s \in S'; f_i(s) = a\}$ を**属性概念**，$I' \subseteq I$，$\bar{a} = (a_i)_{i\in I'}(a_i \in A_i)$ に対して $T_{(I',\bar{a})} = \{s \in S'; f_i(s) = a_i(i \in I')\}$ を**機能概念**という．

各 A_i が単なる集合ではなく何らかの構造を持っている場合には，その構造をもとに S' 上に構造を定めることも可能である．例えば A_i がすべて位相空間のとき，定義 2.2 の F によって導入される S' 上の位相によって属性概念などを定義することも可能である．これは定義 3.2 とは考え方が大きく異なる．

さて，抽象概念が実体集合の部分集合であるなら，一般に「概念」を実体集合の部分集合と考えることもできよう．そのとき，次のような実体概念の定義も可能である．

定義 3.3. 実体 $a \in S$ に対して $\{a\}$ を a についての**実体概念**と呼ぶ．

すなわち，実体集合 S' に対して実体概念集合 S が $S = \{\{a\} : a \in S'\}$ によって定義される．このとき実体集合と実体概念集合の間に１対１の対応がつくことは明らかだが，実体概念がつねに抽象概念になるとは限らない．この定義は吉川の論文にはないので以下では全面的には採用せず，この定義を用いるときは明記し，それ以外は $S = S'$ とする．

以上で１節の公理化の最初の二つのステップが終了したことになる．

4　公理（２節・後）

吉川は実体や概念に関する条件として次の三つの公理を要請する．

> **公理** 1 **（認識公理）．** 実体は属性（あるいは機能，形態などの抽象概念）によって認識あるいは記述することが可能である．
>
> **公理** 2 **（存在物と概念との対応関係）．** 実体集合と（理想的な）実体概念集合とは１対１に対応する．
>
> **公理** 3 **（概念に関する位相公理，または概念の操作公理）．** 抽象概念集合は実体概念集合の位相である．

「認識」とは何か？「記述」とは何か？（公理系の中には著者も読者も観察者も無い.）公理 1 を「実体は属性概念，機能概念，抽象概念などの抽象概念によって，また，そうした抽象概念のみによって参照される」と読むことも可能であろう．公理 2 は，実体概念集合の具体的な定義がなければ分析できない．この二つの公理は定義され単語に関する条件というよりは公理化の際の立場の表明と読むべきであり，その意味において，この二つの公理は現代的な数学の公理系における公理ではない．

公理 3 は集合 $\boldsymbol{T}$ が S 上の位相を成すことを要請する．なお，ここには明示されていないが，位相とは開集合系による位相を意味すると考えられる．

公理 4.1. $\boldsymbol{T}$ は集合 S 上の位相を成す．すなわち以下の３条件が成立する．

(1) $\varnothing \in \boldsymbol{T}, S \in \boldsymbol{T}$,

(2) $T_1, T_2 \in \boldsymbol{T}$ ならば $T_1 \cap T_2 \in \boldsymbol{T}$,

(3) $T_\lambda \in \boldsymbol{T}(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \in \boldsymbol{T}$.

なお，[1] では位相の条件として次の三つが挙げられている．

> (1) $\varnothing \in \boldsymbol{T}, S \in \boldsymbol{T}$,
>
> (2) $T_\lambda \in \boldsymbol{T}(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \in \boldsymbol{T}$,
>
> (3) $T_\lambda \in \boldsymbol{T}(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda \in \boldsymbol{T}$.

条件 2 は本来の位相の条件よりも強いが，とりあえずここでは [1] に従い，位相という言葉でこの強い条件が仮定されるものとする．

吉川はこの公理のすぐ後で，次のような説明を与える．

> … ここで，上述の表現は概念の静的構造をも記述する表現になっているが，当然概念操作に積，和，補集合などの動的な集合演算の可能性をも認めているのであって，その意味で操作公理という側面ももっている．

しかし，位相，すならち開集合系は「補集合」という集合演算については閉じていない．よって，抽象概念 $T \subseteq S$ が与えられたとき，T の補集合 $S \setminus T$ が抽象概念になるとは限らない．これは上の吉川の説明に矛盾し，我々の素朴な感覚にも反する．定理 5 にあるように，抽象概念が「分類」であるならば，抽象概念の否定によって得られる概念も抽象概念となるべきであり，抽象概念集合は補集合演算に関して閉じているべきである．

このことには次の二通りの対応が考えられる．

(1) $\boldsymbol{T}$ が位相であることに加え，補集合についても閉じていることも要請する．

(2) $\boldsymbol{T}$ が位相であることのみを要請し，$\boldsymbol{T}$ が補集合について閉じていないことには別の解釈を与える．

前者は古典的な集合による概念の形式化の考え方に合致する．この立場では $\boldsymbol{T}$ は S 上の完備ブール代数となり，従って公理 4.1 の替わりに次の公理を採用することになる．

公理 4.2. $\boldsymbol{T}$ は集合 S 上の完備ブール代数をなす．

完備ブール代数は自明に位相の条件を満たすので，このとき $\boldsymbol{T}$ が S 上の位相となることに変わりはない．しかし，特殊な位相である．

吉川は後者を採用し，[4] で次のような定義を与えている．

定義 4.3. S を位相空間とする．S の閉集合を**確定的**な抽象概念，S の開集合を**非確定的**な抽象概念という．

確定的な主張の否定は必ずしも確定的な主張にはならず，これが開集合の補集合が必ずしも開集合にはなないことに対応する．この考え方とは直観主義論理の考え方に近く，その意味でも興味深い．しかし今度は，開集合と閉集合の和集合や積集合が必ずしも開集合や閉集合にならないことから，抽象概念がそうした集合演算について閉じているならば確定的でも非確定的でもない概念を扱う必要が生じ，一般設計学では位相空間のどのような集合を扱うのか，抽象概念集合に要求される条件が何のか改めて明示する必要が生じる．（結局 $\boldsymbol{T}$ が完備ブール代数になることが要請される可能性が高い.）

とりあえずここでは $\boldsymbol{T}$ が（強い条件を仮定する）位相となることのみを仮定する．

なお，[3] では公理 3 は次の形で述べられている．

> **公理** 3 **（操作公理）**[3]**．** 抽象概念は実体概念集合の位相である．

リテラルには，この公理では一つの抽象概念が一つの位相になる．抽象概念とは実体概念集合の部分集合なので，

それ自身が位相になることはない．[1] の表現が正確であろう．また，属性概念集合 $\boldsymbol{T}_0$，形態概念集合 $\boldsymbol{T}_1$，機能概念集合 $\boldsymbol{T}_1$ には何も条件が与えられていないが（$\boldsymbol{T}$ が位相であっても，その部分集合が位相になるとは限らない），こうした集合も S 上の位相を成すことが後の定理 4 では仮定されている．このとき，位相をなす集合族を属性概念の集合と呼ぶのではなく，定義 3.2 のように属性概念の集合を何らかの方法で定義するのであれば，それが位相をなすことは証明が必要である.（定義 3.2 からは属性概念の集合が位相になることは保証されない.）

いずれにせよ，以上で舞台設定，すなわち公理系の定義は終わる．

5　理想的知識（３節・前）

３節ではまず，理想的知識という単語が定義され，その基本的な性質が紹介される．

> **定義** 9**．理想的知識**とは，実体集合のすべての元を知っており，かつ各元を抽象概念で厳密に表現可能な知識を言う．

「知る」とは何か？「厳密な表現」とは何か？吉川の公理１には「実体は属性（などの抽象概念）によって認識あるいは記述することが可能である」とある.「知ること」と「認識」は,「表現」と「記述」は同じことを意味するのか？定義 9 と公理 1 にはどのような関係があるのか？

吉川は定義 9 の前で「人間の知識は，実体概念と抽象概念とから成立している.」というので，次の定義が可能であろう．

定義 5.1. $(S, \boldsymbol{T})$ を**知識**という．

「理想的知識」の定義は「知識」に関する条件の提示である．それは何か？

この問に対する答として，次の二つが考えられる．

定義 5.2. (1) 定義 3.3 を採用する．任意の実体概念が抽象概念となるとき，すなわち，すべての S の元 a について $\{a\} \in \boldsymbol{T}$ となるとき，$(S, \boldsymbol{T})$ を（強い意味での）**理想的知識**という．

(2) $(S, \boldsymbol{T})$ がハウスドルフ空間となるとき，すなわち，すべての S の元 a と b について，$a \in A$，$b \in B$，$A \cap B = \varnothing$ となる $\boldsymbol{T}$ の元 A, B が存在するとき，$(S, \boldsymbol{T})$ を（弱い意味での）**理想的知識**という．

任意の実体 a が抽象概念 $\{a\}$ によって表現されることが「実体が厳密に表現される」ことだと考えるのが，強い意味での理想的知識の定義の考え方である．このとき位相の条件から $\boldsymbol{T} = \mathcal{P}(S')$ となり，$\boldsymbol{T}$ は離散位相となる．一方，任意の二つの実体が開集合によって区別されることが「実体が厳密に表現される」ことだと考えるのが，弱い意味での理想的知識の定義の考え方である．

理想的知識について吉川は次の定理を挙げる．

> **定理** 1**．** 理想的知識はハウスドルフ空間である．

弱い意味の理想的知識の定義を採用しても，強い意味の理想的知識を採用しても，この定理は自明に成立し証明の必要はない．

その「証明」とは次のようなものである．

証明．

(1) 理想的知識においては実体概念集合 S は実体集合 S' と合同である．その S に，部分集合系としての抽象概念集合 $\boldsymbol{T}$ が導入される．

(2) いま S の元 s_1, s_2 を考える．これらの近傍系を $\boldsymbol{T}(s_1), \boldsymbol{T}(s_2)$ と書く．もちろん

$$\boldsymbol{T} = \{\boldsymbol{T}(s); s \in S\} \tag{7}$$

である．

(3) 実体が抽象概念によって厳密に表現されるというのは，S の元 s_1, s_2 が抽象概念によって区別可能であることが必要条件であるから，近傍 $T_1 \in \boldsymbol{T}(s_1), T_2 \in \boldsymbol{T}(s_2)$ を適当にとって，

$$T_1 \cap T_2 = \varnothing \tag{8}$$

となることが可能でなければならない．このような分離を満たす位相をもつ空間はハウスドルフ空間である．

(4) また逆に，ハウスドルフ空間であれば収束の一意性が保証されるから十分である．

この「証明」を分析する．

まず，1 は公理 2 と $\boldsymbol{T}$ の定義の再現である．2 は記号の定義だが，式 7 は $\boldsymbol{T} = \bigcup\{\boldsymbol{T}(s); s \in S\}$ と書くべきであろう．3 がこの証明の本体である.「実体が抽象概念によって厳密に表現される」ことが「理想的知識」の定義にある条件であり，そのためには「各元が開集合によって分離できることが必要」なのであれば，この部分は

> 理想的知識はハウスドルフ空間であることが必要である．

という主張に他ならない.（もちろん，この主張を得るためには三段論法を一回だけ用いる.）これは定理 1 の主張そのものである．4 が証明になぜ必要なのかは分からない．

つまりこの「証明」は，近傍系の記号の定義やハウスドルフ空間の説明などを省けば,「理想的知識がハウスドルフ空間であることの理由は，ハウスドルフ空間であることが必要だから」と要約できる．従って，この「証明」は証明として読むべきではなく,「実体が抽象概念によって厳密に表現される」ことの定義と読むべきなのかもしれない．ただしその場合も「必要条件」しか与えられていないので，定義としては十分ではない．

確かなのは「理想的知識はハウスドルフ空間である」という主張である．

6　設計仕様

次に吉川は設計仕様の定義をする．

> **定義** 10．**設計仕様**とは，要求者が設計解としての機械，$s' \in S'$ がもつべき性質を抽象概念によって指定したものである．従って，設計仕様は $T \in \boldsymbol{T}$ であり，$s \in T$ である s が設計解である．逆に s' が与えられれば s' の仕様とは s の近傍
>
> $$T \in \boldsymbol{T}\{\boldsymbol{T}(s); s \in S\} \tag{9}$$
>
> であると言える．しかし一般に仕様を与えるのは s' が未知のときである．なお $T \in \boldsymbol{T}_1$ であることが多いが，その場合を機能的仕様と呼ぶ．

「抽象概念によって指定する」という言葉は曖昧であり，式 9 が何を意味するのかも分からない．しかし，定義そのものは明解である．

定義 6.1. $T \in \boldsymbol{T}$ を**設計仕様**と呼び，$s \in T$ をその**設計解**という．

> **定理** 2．要求としての設計仕様は，抽象概念集合の適当な元の積で表すことができる．

設計仕様自身が抽象概念 $T \in \boldsymbol{T}$ であれば，$T = \bigcap\{T\}$ であり，その意味でこの定理は自明である．[1] での「証明」は次のようなものである．

> **証明．** 公理 3 より $T = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$（$\Lambda$ は任意の集合）となることは明らかである．問題は $s \in T$ であるが，実は T_λ の選び方によって，次の三つの場合があり得る．
>
> (1) $T = \{s_1\}$（理想的な仕様）
>
> (2) $T = \{s_1, s_2, \ldots\}$（あいまいな仕様）
>
> (3) $T = \varnothing$（矛盾した仕様）
>
> 前 2 者を合わせて仕様ということがある．

これは設計仕様の元の数による場合分けであり，通常の意味での証明ではない．定理 2 は次の命題を主張するのであろうか？

定義 6.2. 抽象概念の集合 $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を**要求**と呼ぶ．

定理 6.3. 要求の積集合 $T = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ は設計仕様である．

確かに，この定理の証明には公理 3 が必要である.（そして，それで十分である.）

> **定理** 3．（矛盾していない）設計仕様とはフィルタである.（証明略）

フィルタとは次の三っつの条件を満たす S の部分集合の族 $\boldsymbol{F}$ である．

(1) $\varnothing \notin \boldsymbol{F}$,

(2) $A \subseteq B \subseteq S$ かつ $A \in \boldsymbol{F}$ ならば $B \in \boldsymbol{F}$,

(3) $A, B \in \boldsymbol{F}$ ならば $A \cap B \in \boldsymbol{F}$.

設計仕様が抽象概念 $T \in \boldsymbol{T}$ であるなら，$T = \varnothing$ であろうとなかろうと，T はフィルタではない．$\{T\}$ も一般にはフィルタにはならない．設計仕様 T が要求 $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の積集合によって定義されているとしても，一般に要求はフィルタにはならない．

$T \neq \varnothing$ のとき，$\boldsymbol{F}$ を

$$\boldsymbol{F} = \{T' \subseteq S; T \subseteq T'\} \tag{10}$$

で定義すれば，$\boldsymbol{F}$ はフィルタになり $T = \bigcap \boldsymbol{F}$ となる．この意味において，矛盾しない設計仕様はフィルタを定める．定理はこのことを意味しているのであろうか？しかし，逆に $\boldsymbol{F}$ がフィルタであっても $\bigcap \boldsymbol{F}$ が抽象概念になるとは限らず，よって設計仕様になるとは限らない．$\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{T}$ であれば $\bigcap \boldsymbol{F}$ は設計仕様になるが，$\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{T}$ となるフィルタ $\boldsymbol{F}$ の存在を仮定することは $\boldsymbol{T}$ にかなり強い条件を仮定することになる．

[1] の定理 4 は式 6 そのものである．なお，ここで抽象概念空間 $(S, \boldsymbol{T})$，属性空間 $(S, \boldsymbol{T}_0)$，機能空間 $(S, \boldsymbol{T}_1)$，形態空間 $(S, \boldsymbol{T}_2)$ という言葉が初めて現れる.「空間」という以上，これらは位相空間なのであろう．

7　設計解（3 節・中）

設計解という言葉は既に定義 10 で定義されているが，吉川はここで設計解をさらに強い条件を満たす実体概念として定義し直す．

> **定義** 11．**設計解**とは，仕様 T に含まれかつ製造に必要な全情報をもっている実体概念 s である．これからただちに次のことがわかる．

定理 5**.** 理想的知識における実体概念は設計解である.

「製造に必要な全情報をもつ」とはどういうことか？確かなのは仕様 T の全ての元が設計解とは限らないことである．設計に必要な全情報をもつ実体概念の集合 M があらかじめ与えられているものとして，定義を次のように言い直すことは可能であろう.

定義 7.1. $M \subseteq S$ を与えられた集合とする．仕様 T に対して，$T \cap M$ の元を**設計解**と呼ぶ.

[1] での定理 5 の証明は次のようなものである.

証明． 理想的知識においては実体概念が定まると，その近傍としての抽象概念をすべて知ることができるが，その抽象概念の中に製造に必要な全情報がふくまれている．…

「製造に必要な全情報」が何なのかが明らかでなければ，この主張の正しさは肯定も否定もできない.

逆に，この定理を M についての条件と読むこともできよう.「属性空間における実体概念は設計解である」という定理 6 についても同様である．このとき，これらの定義，定理の解釈には二つの立場が考えられる．一つは定理 5，6 を M と S の関係の条件と見るものである．もう一つは，再び実体概念と実体を区別して，これらの定義や定理を読み直すものである.

前者の立場では，定理 5，6 は次のように集合 M の条件として書き直せる.

定義 7.2. $\boldsymbol{T}$ に応じて S の部分集合 $M_{\boldsymbol{T}}$ が定まるものとし，$M_{\boldsymbol{T}}$ の元を**製造に必要な全情報をもつ実体**と呼ぶ．特に $(S,\boldsymbol{T})$ が理想的知識の場合，および $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_0$ の場合は $M_{\boldsymbol{T}}=S$ と仮定する.

さて，$S,\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}_1$ が与えられているとする．これらの集合から何が製造が可能なのかの判断に十分な情報が得られると仮定しよう．$\boldsymbol{T}=\mathcal{P}(S)$ の場合および $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1$ の場合には $M=S$ となることが要請されている．$M \subsetneq S$ と仮定する．我々が $\boldsymbol{T}$ からいくつかの抽象概念を失い，抽象概念の集合が $\boldsymbol{T}^*$ になったと仮定しよう．それに応じて M も変化し M^* となる．ここで，もし $\boldsymbol{T}^*=\boldsymbol{T}_1$ であれば，条件から $M^*=S$ である．つまり，$\boldsymbol{T}^* \subsetneq \boldsymbol{T}$ なのに $M \subsetneq M^*$ となり，知識は減るのに製造可能なものが増えることになる．これは我々の直感に反する.

吉川の定義や定理の解釈が間違っていなければ，$\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{T}_1$，S の間に何らかの条件を加える必要が生じる．例えば，そもそも S は先天的に与えられるものではなく，$\boldsymbol{T}$ に応じて定義されるものだとすれば，$\boldsymbol{T}$ が $\boldsymbol{T}^* \subsetneq T$ に変化したとき，製造可能でないものが「存在するであろうもの」でなくなり S から消え，S が $S^* \subseteq S$ に変化し，結果として $M^*=S^*$ となることもあろう．M が大きくのなるのではなく，S が小さくなる.

この考え方には合理性がある．実体集合とは「存在するもの，存在したもの，存在するであろうものを含む」集合であった．これを超越的に「全て」とまでは言わない以上，何が存在しえるのかは我々がどのような抽象概念を持つかに依存する．ある抽象概念が失われれば，それに応じて「存在するであろうもの」も失われる．ただし，この立場では定理 7 は解釈できない.

定理 7**.** 設計解は属性概念集合から適当に選んだ元の積によって与えられる.

一方，後者の立場では S と S' の同一視を忘れ，定義 3.3 を採用することになる．このとき定義 11，定理 5，6 は次のようになる.（証明は自明である.）

定義 7.3. 実体概念 $\{s\}$ が $\boldsymbol{T}$ の元となるとき $\{s\}$ を**設計解**という.

定理 7.4. （定理 5）$\boldsymbol{T}=\mathcal{P}(S')$ のとき，任意の実体概念は設計解となる.

定理 7.5. （定理 6）$\{s\} \in \boldsymbol{T}_1$ となる $\{s\}$ は設計解である.

設計解の定義は吉川の定義からは離れるが，理論の流れは自然になる．ただし，この立場でも定理 7 の解釈はできない.

定理 7 を設計解の定義として採用するべきかもしれない．属性概念空間が位相空間なら，属性概念の積も属性概念となるので，次のような定義が可能である.

定義 7.6. $\boldsymbol{T}_0$ の元（属性概念）を**設計解**という.

このとき，定理 6 は上の表現でそのまま通る．しかし今度は定義 5 が解釈できなくなる．強引な解決方法は定義 7.3 と定義 7.6 の混合か，理想的知識では全ての抽象概念が属性概念となることを仮定するかのいずれかであろう.

後の文脈から判断し，定義 7.6 を設計解の定義として採用する.

8　設計（3節・後）

さて，ここまでの議論では $\boldsymbol{T}$ が和集合と積集合に関して閉じていればよく，それ以外に $\boldsymbol{T}$ が位相であることの性質は全く使われていない．設計を論じる場面で初めて連続概念が現れる.

定義 12**.** **設計**とは，抽象概念空間上に示された領域に対応する属性（概念）空間上の領域を指定することである.

> **定理** 8．設計仕様を表現する抽象概念空間が部分空間としての属性空間に限定される場合には，設計は仕様を記述したとき完了する．

「領域を示す」「領域を指定する」とはどういうことか？抽象概念空間は $(S, \boldsymbol{T})$，属性概念空間は $(S, \boldsymbol{T}_0)$ である．設計仕様が $\boldsymbol{T}$ の元として与えられることを考えると,「属性（概念）空間上の領域を指定すること」とは $\boldsymbol{T}_0$ の元を指定することであろう．定理 8 の主張とその証明が「定義から明らか」とされていることも合わせて考えれば，次のような定義は妥当であろう．

定義 8.1. **設計**とは，与えられた設計仕様 $T \in \boldsymbol{T}$ に対して $T' \subseteq T$ を満たす設計解 $T' \in \boldsymbol{T}_0$ を指定することである．

このとき定理 8 は「設計仕様 T が $T \in \boldsymbol{T}_1$ を満たすとき，設計仕様が与えられたときに設計は完了する.」となる．設計仕様が $\boldsymbol{T}_0$ の元ならば設計仕様自身が設計解になるので，この主張は自明に正しい．

> **定理** 9．理想的知識（ハウスドルフ空間）での設計は，仕様を記述したときに完了する．

この定理は次のように言い直せる．

定理 8.2. $(S, \boldsymbol{T})$ がハウスドルフ空間のときは，設計仕様 $T \in \boldsymbol{T}$ が与えられたときに設計は完了する．

この定理の吉川は次のように証明する．

(1) 定理 2 より仕様は $T = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ と表現される．
(2) 従って，λ を増大させると T は縮小列を作る．
(3) 定理 3 によってフィルタであるから，$T \neq \varnothing$.
(4) 故に，ある λ で $T = \{s_1, s_2, \dots\}$ となっている．
(5) しかしハウスドルフ空間であるから，λ を増大して収束させたとすると $T = \{s_k\}$ に一意に収束する．
(6) そのとき理想的知識では s_k の属性空間での近傍が完全に既知であるからそれが設計解である．

この「証明」を分析する．

まず，設計では始めに仕様 T が与えられるはずである．この仕様に対していかにして設計解を与えるかが問題である．

1 において，仕様が $\boldsymbol{T}$ の元なのであれば，$\Lambda = \{0\}$ とすれば，$T_0 = T$ と定めることで，$T = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ となる．Λ があらかじめ与えられていても，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $T_\lambda = T$ と定義すれば，やはり条件は自明に成り立つ．

2 は意味が分からない．T が縮小列を作るというが，T は λ と関係を持たないので，λ を増大させても T が変化することはない．2 を「$T(\lambda) = \bigcap_{\kappa \in \lambda} T_\kappa$ と定義するときに λ を増大させると $T(\lambda)$ は縮小列を作る」と読むことは可能であるが，それでも，例えば $T_\lambda = T$ のときには任意の $\lambda \in \lambda$ に対して $T(\lambda) = T$ であり，λ を変化させても $T(\lambda)$ は変化しない．

3 については，まず定理 3 から「何が」フィルタになると主張しているのか分からない．$T \neq \varnothing$ であると言うが，T は仕様である．T が矛盾した仕様ならフィルタの存在に関係なく $T = \varnothing$ である．定理 2 の証明にあるように仕様は空集合でないと仮定するのであれば，フィルタの存在に関係なく $T \neq \varnothing$ である．つまり，$T \neq \varnothing$ かどうかはフィルタとは関係が無い．$T \neq \varnothing$ は証明すべきことでなく仮定であり，その意味で 1，2，3（の前半）は定理の証明に必要ない．

$T \neq \varnothing$ であるとしよう．このとき T の元 s が存在する．6 で言うように，定理 5 から任意の実体概念は設計解なので，$T \neq \varnothing$ とした時点で証明は終わる．4，5 は定理の証明に必要ない．

4 は，$T \neq \varnothing$ から $T = \{s_1, s_2, \dots\}$ と書けることは分かるが,「ある λ で」という条件が何を意味するのか分からない．

5 も分からない.「しかしハウスドルフ空間であるから，λ を増大して収束させたとすると $T = \{s_k\}$ に一意に収束する.」という．何を収束させる？点列 $\{s_k\}$？これは収束するとは限らない．$T = \{s_k\}$ とあるので $\lim_\lambda T(\lambda) = \{s_k\}$ を意味しているとも読めるが，上に書いたように，これも一般には成り立たない．

ハウスドルフ空間において成り立つのは，一つの点列が二つ以上の点に収束することはない，ということだけであり，任意の点列がかならず収束することではない．

この証明は分からない．なお，$T \neq \varnothing$ とした段階でこの定理の証明は終わっているので，この定理でも $\boldsymbol{T}$ の位相としての性質は使われていない．

さて，吉川は設計を写像として再定義する．

> **定義** 13．**設計**とは，機能空間の点を属性空間の点へ移す写像である．

機能空間，属性空間とはそれぞれ $(S, \boldsymbol{T}_1)$，$(S, \boldsymbol{T}_0)$ であり，通常，そうした空間の「点」とは S の元のことである．この定義を文字通り読むなら設計とは S から S の写像のことになる．これは定義 8.1 の設計の定義と整合性を持たない．この定理は次のように読むべきであろう．

定義 8.3. **設計**とは任意の $T \in \boldsymbol{T}_1$ に対して $D(T) \subseteq T$ を満たす $\boldsymbol{T}_1$ から $\boldsymbol{T}_0$ への写像 D である．

> **定理** 10**.** 設計が可能ならば，属性空間 $(S, \boldsymbol{T}_0)$ から機能空間 $(S, \boldsymbol{T}_1)$ への恒等写像が連続写像となる．

[1] でのこの定理の証明にもあるように，属性空間 $(S, \boldsymbol{T}_0)$ から機能空間 $(S, \boldsymbol{T}_1)$ への恒等写像が連続写像となることは $\boldsymbol{T}_1 \subseteq \boldsymbol{T}_0$ と同値である．従って，定理 10 は「設計が可能ならば，任意の機能概念は属性概念となる」ことを意味する．さて，仕様は機能概念として与えられ，定理 8 より「仕様が属性概念によって与えられたときには，設計は仕様を記述したときに完了する」ので，定理 10 を認めれば，

> 設計が可能ならば，設計は仕様を記述したときに完了する．

ことになる．これは設計が満たすべき条件として妥当なものとは考えにくい．おそらく属性概念には設計解になるものと，そうでないものがあり，その区別をするときには定理 10 はそのままでは成り立たない．

[1] での定理 10 の「証明」は以下の通り．

(1) 設計は可能であり，かつ $\boldsymbol{T}_1 \not\subseteq \boldsymbol{T}_0$ と仮定する．

(2) すると設計仕様として $T_{11} \in \boldsymbol{T}_1$ を指定したとき，

$$s_1 \in T_{01} \to s_1 \in T_{11} \tag{11}$$

であるような T_{01} が，属性空間にかならずしも存在しなくなる．

(3) ということは，機能 T_{11} を満たす実体 s_1 を，属性 T_{01} で表現する設計において，

$$\exists s_1 \forall T_{01}(s_1 \in T_{01} \land s_1 \notin T_{11}) \tag{12}$$

ということが起こる．

(4) 従って，この設計解 T_{01} は，仕様 T_{11} を満たさない実体 s_1 を作ってしまう可能性がある．矛盾．

1 は証明の仮定である．

2 を言い直すと次のようになる.「$T_{11} \in \boldsymbol{T}_1$ が存在して，どんな T_{01} についても $s_1 \in T_{01} \to s_1 \in T_{11}$ は成り立たない.」つまり，

$$\exists T_{11} \in \boldsymbol{T}_1 \forall T_{01} \in \boldsymbol{T}_0 (T_{01} \not\subseteq T_{11}). \tag{13}$$

この命題は証明の仮定からは導かれない．設計が可能であることから導かれるのは

$$\forall T_{11} \in \boldsymbol{T}_1 \exists T_{01} \in \boldsymbol{T}_0 (T_{01} \subseteq T_{11}) \tag{14}$$

であり，$\boldsymbol{T}_1 \not\subseteq \boldsymbol{T}_0$ という仮定から導かれるのは

$$\exists T_{11} \in \boldsymbol{T}_1 (T_{11} \notin \boldsymbol{T}_0) \tag{15}$$

である．この二つの命題を組み合わせても式 13 は得られない．

反例がある．$\boldsymbol{T}_0$ は抽象概念の集合であり，S 上の位相なので $\varnothing \in \boldsymbol{T}_0$ である．このとき，どんな T_{11} をとってきても，$\varnothing \subseteq T_{11}$ となる．もちろん，$\varnothing$ は設計解として適当ではないので，このような場合は排除しなければならないだろう．しかし，それならば定理の文面を書き直す必要がある．この定理は，そのままでは成り立たない．

なお，2 を仮定したとしても式 12 は得られないし，3 全体が何を主張しているのかも分からない．

定理の逆は定理 8 と同じく自明に成り立つ．また，定義8.3 を次のように変更すれば定理 10 は自明に成立する．

定義 8.4. **設計**とは任意の $T \in \boldsymbol{T}_1$ に対して $D(T) = T$ を満たす $\boldsymbol{T}_1$ から $\boldsymbol{T}_0$ への写像 D である．

しかしこの場合は，設計は常に仕様を満たす全ての実体を含まなければならない．

「設計が可能である」ことを単に「設計」が存在することとして考えるのではなく，次のように改めて定義する場合にも定理 10 は成立する．

定義 8.5. $T \in \boldsymbol{T}_1$ を設計仕様とする．任意の $a \in T$ に対して $a \in T'$ かつ $T' \subseteq T$ を満たす $T' \in \boldsymbol{T}_0$ が存在するとき，T は**設計が可能**であるという．任意の設計仕様は設計が可能であるとき，単に**設計が可能**であるという．

この定義の採否については議論の余地と必要が共にある．

さて，次の定理に関しても定理 10 と全く同じ状況が生じている．

> **定理** 11**.** 二つの設計解を機能的に識別できるならば，$\boldsymbol{T}_0 \subseteq \boldsymbol{T}_1$ である．
>
> **証明.** 定理 10 と同様，$\boldsymbol{T}_0 \not\subseteq \boldsymbol{T}_1$ とする．このとき
>
> $$\exists s_2 \forall T_{11}(s_2 \in T_{11} \land s_2 \notin T_{01}) \tag{16}$$
>
> となり，異なる設計解が同一の機能を持つとみなされる．矛盾．

定理 10 の証明と同様，$\boldsymbol{T}_0 \not\subseteq \boldsymbol{T}_1$ という仮定からは式 16 は得られない．

9　おわりに

本稿は「一般設計学」を数学的に読み，定義や定理の数学的な形式化を試みたものである．しかし本稿で採用した形式化のもとでは最後の二つの定理に疑問が残る．局所的に無矛盾になるように定義や定理を形式化していくことは難しくないが，全体として無矛盾になるような形式化は決して単純な作業ではない．

なお，本稿で採用した形式化では，[1] の中の議論に関する限り結果的に位相概念は必要ない．一般設計学を数学的に形式化したときに,「一般設計過程」[2] では位相概念が必要になるのか，必要ならばどこでどのように必要なのかを分析することは興味深い．位相概念の使われ方を調べることは一般設計学という理論の分析であって，批判ではない．

一般設計学の数学的な形式化はそうした分析を可能とする．

参考文献

[1] 吉川弘之,「一般設計学序説」, 精密機械 45 (8) 20–26, 1979.
[2] 吉川弘之,「一般設計過程」, 精密機械 47 (4) 19–24, 1981.
[3] 吉川弘之,「一般設計学」, 機械の研究 37 (1) 108–116, 1985.
[4] 吉川弘之,「一般設計学の未来」, 精密機械工学会 D&C 記念講演, 1996.